Leçon 263 - Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

Cadre : Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé (Ω, A, P) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ pour un $d \geq 1$.

1. Variables aléatoires à densité. —

1. Définitions et premières propriétés. —

- Def : Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. S'il existe une fonction $f_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ à valeurs positives, Lebesgue-intégrable, d'intégrale 1, et telle que $\forall A$ pavé de $\mathbb{R}^d$ on ait $P(X \in A) = P_X(A) = \int_A f_X(d)dx$, alors X est dite à densité et f_X est appelée densité de la v.a. X.
- Rem : f_X est unique modulo égalité presque partout, et détermine entièrement la loi de X.
- Rem : Si X est à densité, alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $P(X = x) = 0$.
- Def : Pour $d = 1$, l'application $F_X : x \in \mathbb{R} \mapsto P(X \leq x) \in [0,1]$ est appelée fonction de répartition de X.
- Pro : Supposons $d = 1$. Soit F_X la fonction de répartition de X. On a :
  i) F_X est croissante, continue à droite, et détermine la loi de X.
  ii) $\forall a < b$, $F_X(b) - F_X(a) = P(a < X \leq b)$, $F_X(x) \to_{x\to+\infty} 1$, et $F_X(x) \to_{x\to-\infty} 0$.
  iii) Si X est à densité, alors F_X est continue sur $\mathbb{R}$, avec $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du$, et F_X est dérivable en tout points où f_X est continue.
- Pro : Pour $d = 1$, X est à densité ssi il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tq $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.
- Def : Si $x \mapsto \|x\| f_X(x)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, on dit que X est d'espérance finie, que l'on définit par $E[X] = \int_{\mathbb{R}^d} f_X(x)dx$.
- Théorème de transfert : Pour $d = 1$, soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| f_X(x)dx < +\infty$, alors la v.a. $\varphi \circ X$ est d'espérance finie, et on a :
  $E[\varphi(X)] := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_X(x)dx = \int_{\Omega} \varphi(X(w))P_X(dw)$.
- Pro+Def : Pour $d = 1$, si $E[X^2] \leq +\infty$, alors X est d'espérance finie et on définit la variance de X par : $\sigma_X^2 := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$.

2. Lois usuelles. —

- Def : (Loi uniforme sur $[a,b]$), notée $U_{[a,b]}$, de densité $f(x) = \frac{1}{b-a}\chi_{[a,b]}(x)$.
  Espérance : $\frac{a+b}{2}$, Variance : $\frac{(b-a)^2}{12}$.
- App : (Simulation de lois) Soit X une v.a. de fonction de répartition F_X. On définit : $\forall t \in \mathbb{R}$, $G(t) := inf(\{x \text{ tq } F_X(x) \geq t\})$ la fonction pseudo-inverse de F_X.
  Soit Y de loi $U_{[0,1]}$. Alors $G(Y)$ admet F_X comme fonction de répartition.
- Def : (Loi normale), notée $N(m, \sigma^2)$, où $m \in \mathbb{R}$,$\sigma^2 > 0$, de densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2})$.
  Espérance : m, Variance : σ^2.
- Ex : Cela permet par exemple de modéliser la répartition des notes d'une classe autour de la moyenne m.
- Def : (Loi exponentielle), notée $E(\lambda)$, où $\lambda > 0$, de densité $f(x) = \chi_{\mathbb{R}_+}(x)\lambda e^{-\lambda x}$.
  Espérance : $\frac{1}{\lambda}$, Variance : $\frac{1}{\lambda^2}$.
- Ex : Cela permet de modéliser la durée de vie d'un objet/d'une molécule radioactive grâce à la propriété : $P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$ qui caractérise la loi exponentielle.
- Def : (Loi gamma), notée $\Gamma(n, \lambda)$, ou $n \geq 1$ et $\lambda > 0$, de densité $f(x) = \chi_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1}$
- Def : (Loi chi-deux), notée $\chi^2(n)$, où $n > 0$, de même loi que $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$.
  Espérance : n, Variance : 2n.
- Rem : $\chi^2(n)$ a la même loi qu'une somme de n gaussiennes centrées réduites $\chi(0,1)$. De plus, $E(\lambda) \sim \Gamma(1, \lambda)$.

3. Opérations sur les densités. —

-
- Pro : Soit $X = (X_1, X_2)$ une v.a. à densité, a valeurs dans $\mathbb{R}^2$, de densité f_X.
  Alors X_1 et X_2 sont à densité, et celles-ci vérifient :
  $f_{X_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, x_2)dx_2$ et $f_{X_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x_1, x_2)dx_1$
- Rem : Cette proposition se généralise à $\mathbb{R}^d$.
- Ex : Soit $X = (X_1, X_2)$ de densité $f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} exp(-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2})$. Alors $X_1 \sim N(0,1)$ et $X_2 \sim N(0,1)$.
- Pro : Pour $d = 1$, soit X une v.a. à densité et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement monotone et dérivable. Alors $Y = g(X)$ admet une densité donnée par : $f_Y(y) = \begin{cases} \text{si } i \in g(\mathbb{R}) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$
- Pro : (Critère d'indépendance) Soient X_1,X_2 deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$. Alors on a :
  i) (X_1 et X_2 indépendantes et de densités f_{X_1},f_{X_2}) $\Rightarrow$ ((X_1, X_2) admet une densité $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$)
  ii) ((X_1, X_2) admet une densité $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_1(x_2)$ où f_1,f_2 sont intégrables positives) $\Rightarrow$ (f_1 et f_2 sont à un facteur positif près les densités de X_1 et X_2 et X_1,X_2 indépendantes).
- App : Pour $S \sim E(\frac{1}{2})$ et $H \sim U_{[0,2\pi]}$ indépendantes, alors $X := \sqrt{S}cos(H)$ et $Y := \sqrt{X}sin(H)$ sont deux v.a. réelles indépendantes et de même loi $N(0,1)$.
- Pro : Soient X_1,X_2 indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.
  Alors $P_{X_1+X_2} = P_{X_1} * P_{X_2}$.
  Si de plus X_1 et X_2 sont à densité, alors $X_1 + X_2$ est à densité, avec : $f_{X_1+X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(y - x_1)dx_1$.
- App : Soient $X_1, .., X_n$ indépendantes de lois respectives $\Gamma(a_1, \lambda), .., \Gamma(a_n, \lambda)$. Alors on a :
  $X_1 + .. + X_n \sim \Gamma(a_1 + .. + a_n, \lambda)$.

4. Fonction caractéristique. —

- Def : On appelle fonction caractéristique d'une v.a. X l'application φ_X donnée par :
  $\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\varphi_X(t) := \int_{\mathbb{R}^d} exp(i < x, t > dP_X(x) = E[exp(i < X, t >)]$.
- Rem : Si X est à densité, φ_X est la transformée de Fourier de f_X (car $dP_X(x) = f_X(x)dx$).
- Pro : La fonction caractéristique de X caractérise la loi de la X.
- Ex : Si $X \sim N(m, \sigma^2)$ alors $\varphi_X(t) = exp(imt - \frac{t\sigma^2}{2})$.
  SI $X \sim E(\lambda)$, alors $\varphi_X(t) = \frac{1}{1-\frac{2t}{\lambda}}$.
  Fonction caractéristique de la loi de Laplace. Fonction caractéristique de la loi de Cauchy.
- Pro : (Critère d'indépendance) Soit $X = (X_1, X_2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$. Alors on a :
  $(X_1, X_2$ indépendantes$) \Leftrightarrow (\varphi_{(X_1,X_2)}(t_1, t_2) = \varphi_{X_1}(t_1)\varphi_{X_2}(t_2)\ )$.
- Ex : Pour X_1, X_2 iid de fonction caractéristique $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$ (Loi de Laplace), on pose $Y_1 := X_1 - X_2$ et $Y_2 = X_1 + X_2$.
  Alors Y_1 et Y_2 ont même fonction caractéristique, mais ne sont pas indépendantes.
- Pro : Pour $d = 1$, si X^k est intégrable, alors Φ_X est de classe C^k.
  On a de plus $\Phi_X^{(k)}(t) = E[(iX)^k e^{iXt}]$.
- Thm : Réciproquement, Si Φ_X est de classe C^k, alors X a un moment d'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.
- **Dev** : Théorème de Lévy : X_n converge en loi vers X ssi Φ_{X_n} converge simplement vers Φ_X.
- App : Théorème Central de la Limite : Soit X_n une suite de v.a. réelles iid ayant un moment d'ordre 2. Alors la suite $\frac{X_1+..+X_n-nE[X_1]}{\sqrt{var(X_1)n}}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.
- Application à un intervalle de confiance.

2. Vecteurs gaussiens. —

1. Généralités. —

-

2. Projection de vecteurs gaussiens. —

-
- Thm : Soient X,Y des v.a. réelles iid et L^2 telles que $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes. Alors X, Y sont des v.a. gaussiennes.
- Pro : (Caractérisation de l'indépendance)

3. Approximation d'intégrales par la méthode de Monte-Carlo. —

- **Dev** : Approximation d'intégrale par la méthode de Monte-Carlo : Soit $f : [0, 1]^d \to \mathbb{R}$ intégrable. On note $I = \int_{[0,1]^d} f(x)d\lambda(x)$.
  Pour $X_{n,k}$ des v.a. réelles iid de loi $U_{[0,1]}$, on construit $Y_n := (X_{n,1}, \ldots, X_{n,d})$ qui est une famille de v.a. iid de loi uniforme sur $[0, 1]^d$. On note $S_n = (f(Y_1) + \cdots + f(Y_n))/n$.
  Alors, pour tout $0 < \varepsilon \leq (\frac{\|f\|_2}{\|f\|_\infty})^2$ assez petit, on a : $P(I - S_n > \varepsilon) \leq 2\exp(-n(\frac{\varepsilon\|f\|_\infty}{\|f\|_2})^2)$.
  L'approximation de l'intégrale de f par le barycentre de n évaluations données par des v.a. uniformes a ainsi une probabilité de ne pas être ε-proche de l'intégrale de f qui décroît exponentiellement en n.

Références

Ouvrard (Probas 1) :
Ouvrard (Probas 2) :
Zuily, Queffélec : Théorème de Lévy+TCL(Dev).

June 1, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes